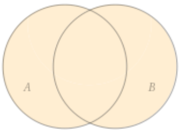
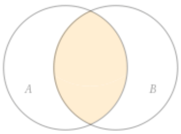
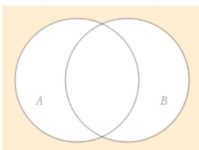
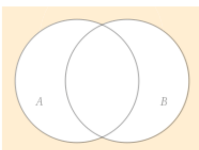
Musterlösung 1

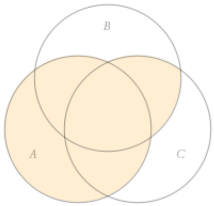
1. a)

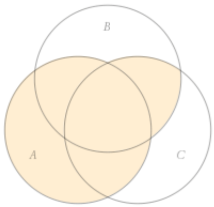
1. 

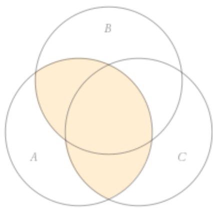
2. 

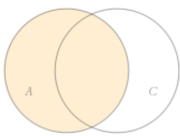
3. 

4. 

5. 

6. 

7. 

8. 

b)

$$
\begin{aligned}
x \in A \cap (B \cup C) &\Rightarrow x \in A \wedge x \in (B \cup C) && (1)\\
&\Rightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) && (2)\\
&\Rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) && (3)\\
&\Rightarrow x \in A \cap B \vee x \in A \cap C && (4)\\
&\Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) && (5)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) &\Rightarrow x \in A \cap B \vee x \in A \cap C && (6)\\
&\Rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) && (7)\\
&\Rightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) && (8)\\
&\Rightarrow x \in A \wedge x \in (B \cup C) && (9)\\
&\Rightarrow x \in A \cap (B \cup C) && (10)
\end{aligned}
$$

Folglich haben wir gezeigt

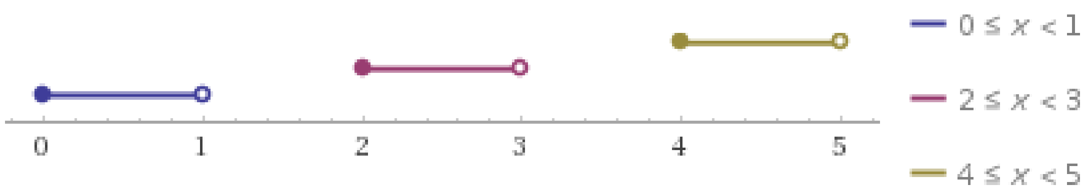
$$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

und

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C),$$

somit sind die Mengen gleich.

c) Die Menge A ist die Vereinigung von Intervallen der Form $[2i, 2i+1)$, welche für $i \in \{1, 2, 3\}$ folgendermassen aussieht



Die unendliche Menge enthält alle geraden Zahlen, aber enthält nicht die ungeraden natürlichen Zahlen. Damit ist

$$2 \in A$$

$$3 \notin A$$

$$10^5 \in A.$$

Siehe nächstes Blatt!

Das Intervall $[3,4)$ ist nicht in unserer Menge enthalten, folglich ist

$$\pi \notin A,$$

da $\pi = 3,1415...$ ist.

2. Es gilt

$$\begin{aligned}
D_1 &= A \cap B \cap C, \\
D_2 &= A \cup B \cup C, \\
D_3 &= ((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C))^c = (A^c \cup B^c) \cap (A^c \cup C^c) \cap (B^c \cup C^c), \\
D_4 &= D_2^c = (A \cup B \cup C)^c = A^c \cap B^c \cap C^c, \\
D_5 &= (A \cap B \cap C)^c = A^c \cup B^c \cup C^c, \\
D_6 &= (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C).
\end{aligned}$$

3. Das Experiment wird entweder nach endlicher Zeit abgebrochen (nämlich wenn eine 6 gewürfelt wird) oder man würfelt unendlich lange. Also definieren wir

$$\begin{aligned}
E_n &= \{(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}, 6) : \omega_i \in \{1, \dots, 5\}, 1 \leq i \leq n-1\} \\
E_\infty &= \{1, \dots, 5\}^{\mathbb{N}} = \{(\omega_1, \omega_2, \dots) : \omega_i \in \{1, \dots, 5\}, \forall\, i \geq 1\}
\end{aligned}$$

Damit lässt sich der Grundraum als

$$\Omega = \Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\Big) \cup E_\infty$$

darstellen. Beachten Sie, dass $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ äquivalente Notationen sind und deshalb dieselbe Menge bezeichnen (insbesondere ist E_∞ in der Vereinigung $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ nicht enthalten). Also stellt

$$\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\Big)^c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n^c = E_\infty$$

das Ereignis “Es wird nie eine 6 gewürfelt” dar.